

FAKULTET PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKIH ZNANOSTI I ODGOJNIH PODRUČJA

Fizički praktikum

Student: **Petar Stipanović**

Naslov vježbe: **Provjera Hookeova zakona**

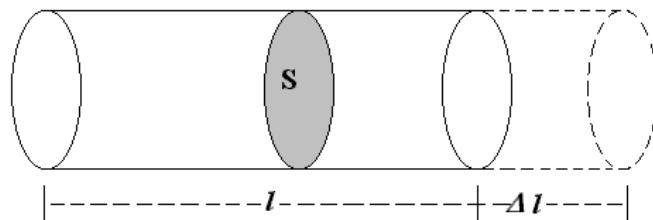
Redni broj: 7.

Split, 23.04.2002.

Vježba 7: **PROVJERA Hookeova zakona**

CILJ: Odrediti Youngov modul elastičnosti zadane žice od cekasa iz ovisnosti relativnog produljenja žice o sili istezanja u dvije nezavisne serije mjerena.

TEORIJA: Osnovni zakon teorije elastičnosti: **u nekom intervalu sile, koja djeluje na tijelo, deformacija tijela razmjerna je sili, ne ovisi o vremenu i gubi se kada sila prestaje djelovati.** Ako na tijelo u obliku valjka djelujemo na osnovicu silom koja isteže valjak, produljenje tijela



iznosi: $\Delta l = \frac{1}{E} l \frac{F}{S}$, gdje je l početna duljina tijela, S površina presjeka, a veličina E, recipročna konstanti razmjernosti, **Youngov modul ili modul elastičnosti.**

Deriviranjem istezanja Δl po sili dobijemo:

$$d(\Delta l) = dl = \frac{l}{ES} dF$$

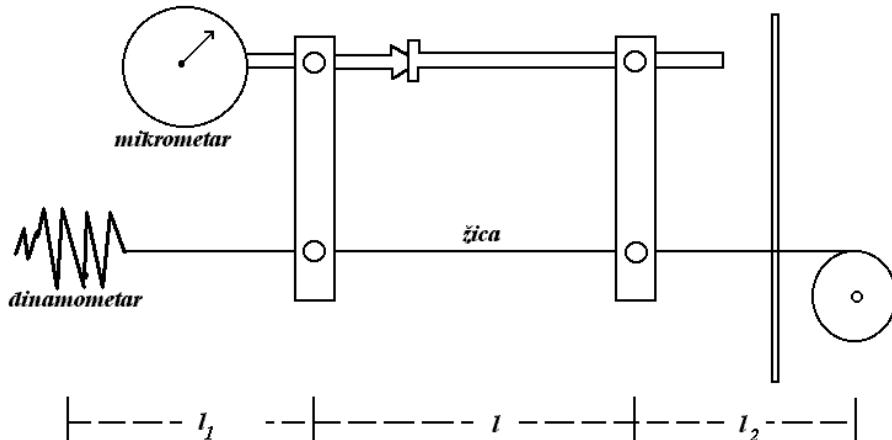
pa vrijedi:

$$E = \frac{ldF}{Sdl}.$$

PRIBOR: Koristi se uređaj kojim se rasteže žica, metar ili pomična mjerka, za mjerjenje duljine žice te mikrometarski vijak za mjerjenje debljine žice $2r$.

OPIS: Žica se na jednom kraju pričvrsti na dinamometar, zatim se učvrsti u dvjema stegama, a na drugom kraju zateže se pomoću pužnog vijka. Dinamometrom mjerimo силу zatezanja žice, koja se na skali očitava u kilopondima. Mikrometrom mjerimo promjenu razmaka stega. Mala kazaljka mikrometra pokazuje broj cijelih milimetara, a velika kazaljka stotinke milimetra. Žicu treba istezati i mjeriti produljenje žice. Stoga treba zbog produljenja utisnuti šipku koja se nalazi u osovini mikrometra. Osovina mikrometra učvršćuje se u jednoj stegi.

U uređaju na žicu se djeluje jednakom silom u tri područja: Od dinamometra do prve stege (l_1), od prve do druge stege (l), te od druge stege do pužnog vijka (l_2). Relativno produljenje $\frac{\Delta l}{l}$ jednako je na svakom dijelu. Jedna stega se jače pomiče nego druga pa mikrometar mjeri promjenu razmaka stega.



1.SERIJA MJERENJA

mjerenje	2r/mm	r/mm	l/mm	F/kp	F/N	$\Delta l / mm$
1.	0.26	0.13	228.98	0.25	2.5	0.05
2.	0.25	0.13	229.01	0.50	4.9	0.11
3.	0.26	0.13	229.00	0.75	7.4	0.19
4.	0.26	0.13	229.22	1.00	9.8	0.25
5.	0.26	0.13	228.92	1.25	12.3	0.33
6.	0.26	0.13	229.20	1.50	14.7	0.34
7.	0.26	0.13	229.22	1.75	17.2	0.39
8.	0.26	0.13	229.16	2.00	19.6	0.44
9.	0.26	0.13	229.14	2.25	22.1	0.49
10.	0.26	0.13	229.20	2.50	24.5	0.56
11.	/	/	/	2.75	26.9	0.63
12.	/	/	/	3.00	29.4	0.68
13.	/	/	/	3.25	31.9	0.75
14.	/	/	/	3.50	34.3	0.85
15.	/	/	/	3.75	36.8	0.89
16.	/	/	/	4.00	39.2	0.95
17.	/	/	/	4.25	41.7	1.02
18.	/	/	/	4.50	44.1	1.08
19.	/	/	/	4.75	46.6	1.15
20.	/	/	/	5.00	49.1	1.24

Tblica 1. Rezultati mjerenja

Za računanje površinhe presjeka potreban nam je polumjer, a ne promjer pa smo dobivene vrijednosti veličine promjera podijelili sa 2. Srednji polumjer dobijemo računajući po formuli

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{10} r_i}{10} = 0.130\text{mm}, \quad \text{a odstupanje aritmetičke sredine računajući po formuli}$$

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (r_i - \bar{r})^2}{10}} = 0.000\text{mm}. \quad \text{Srednja površina presjeka žice iznosi } \bar{S} = \bar{r}^2 \pi = 0.053\text{mm}^2, \text{ a}$$

pripadna pogreška $\sigma_s = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 \cdot \sigma_r^2} = 2\bar{r}\pi\sigma_r = 0.000\text{mm}^2$. Na sličan način kao pri računanju

$$\text{srednjeg polumjera izračunamo srednju duljinu žice } \bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^{10} l_i}{10} = 229.10\text{mm} \text{ te pripadnu}$$

pogrešku $\sigma_l = 0.04\text{mm}$. Silu mjerenu u kilopondima pretvaramo u njutne po pravilu $1\text{p}=0.0098\text{N} \Rightarrow 1\text{kp}=9.81\text{N}$. Modul elastičnosti određujemo iz grafikona pomoću nagiba pravca $a = \frac{\Delta l}{F}$, pa iz relacije $\frac{\Delta l}{F} = \frac{l}{ES} \Rightarrow E = \frac{l}{aS}$. Podatke potrebne za izračunavanje koeficijenta smjera pravca prikazati ćemo tablicom 2.

mjerenje	$\Delta l \cdot F / 10^{-3} Nm$	F^2 / N^2	$\Delta l^2 / 10^{-8} m^2$
1.	0.13	6.3	0.3
2.	0.54	24	1.2
3.	1.4	55	3.6
4.	2.5	96	6.3
5.	4.1	151	11
6.	5.0	216	12
7.	6.7	296	15
8.	7.0	384	19
9.	11	488	24
10.	14	600	31
11.	17	724	40
12.	20	864	46
13.	24	1020	56
14.	29	1180	72
15.	33	1350	79
16.	37	1540	90
17.	42.5	1740	104
18.	47.6	1940	117
19.	53.6	2170	132
20.	60.9	2410	154

Tablica 2. Obrada rezultata

Najprije koristeći opću formulu

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

odredimo srednje vrijednosti podataka iz tablice:

$$\overline{\Delta l F} = 20 \cdot 10^{-3} Nm$$

$$\overline{F^2} = 860 N^2$$

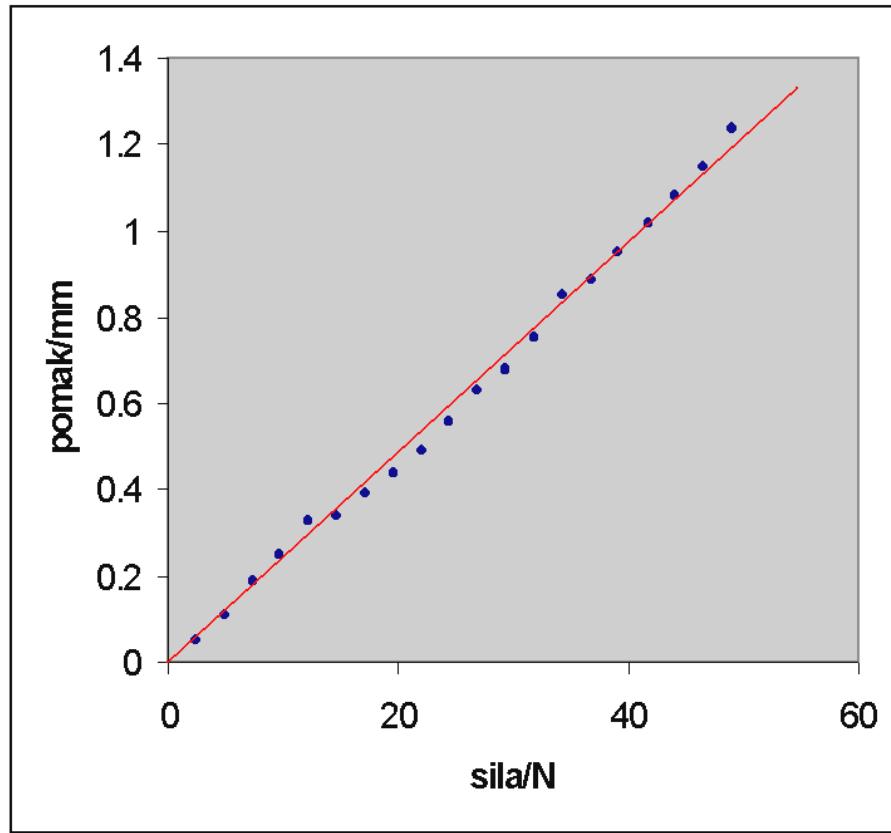
$$\overline{\Delta l^2} = 50 \cdot 10^{-8} m^2$$

Sada možemo izračunati

$$\bar{a} = \frac{\overline{\Delta l F}}{\overline{F^2}} = 2.3 \cdot 10^{-5} mN^{-1}$$

te pripadnu pogrešku

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{20} \left(\frac{\overline{\Delta l^2}}{\overline{F^2}} - \bar{a}^2 \right)} = 0.14 \cdot 10^{-5} mN^{-1}.$$



Graf 1. Iz grafa se vidi da je pomak proporcionalan sili, tj. što je sila veća to ja pomak (produljenje) veće.

Konačno srednji modul elastičnosti iznosi:

$$\bar{E} = \frac{\bar{l}}{\bar{a}\bar{S}} = 1.90 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2},$$

a pripadna pogreška:

$$\sigma_E = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial E}{\partial x_i} \Big|_{x_1=\bar{l}, x_2=\bar{a}, x_3=\bar{S}} \right)^2 \cdot \sigma_i^2} =$$

$$\sigma_E = \sqrt{\left(\frac{1}{aS} \right)^2 \cdot \sigma_a^2 + \left(\frac{l}{a^2 S} \right)^2 \cdot \sigma_a^2 + \left(\frac{l}{aS^2} \right) \cdot \sigma_s^2} = 0.11 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}.$$

što možemo zapisati u obliku

$$E = (1.9 \pm 0.11) \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$$

2. SERIJA MJERENJA

BR.	MJERNJA		OBRADA MJERENJA			
	F/kp	$\Delta l / mm$	F/N	$\Delta l \cdot F / 10^{-3} Nm$	F^2 / N^2	$\Delta l^2 / 10^{-8} m^2$
1	0.25	0.06	2.5	0.2	6.3	0.4
2	0.50	0.10	4.9	0.49	24	1.0
3	0.75	0.15	7.4	1.1	55	2.3
4	1.00	0.20	9.8	2.0	96	4.0
5	1.25	0.28	12.3	3.4	151	7.8
6	1.50	0.33	14.7	4.9	216	10.9
7	1.75	0.40	17.2	6.9	296	16
8	2.00	0.44	19.6	8.6	384	19
9	2.25	0.51	22.1	11.3	488	26
10	2.50	0.57	24.5	14.0	600	32
11	2.75	0.63	26.9	16.9	724	40
12	3.00	0.68	29.4	20.0	864	46
13	3.25	0.77	31.9	27.8	1020	76
14	3.50	0.84	34.3	28.8	1180	81
15	3.75	0.92	36.8	33.9	1350	85
16	4.00	0.94	39.2	36.8	1540	88
17	4.25	1.03	41.7	42.9	1740	106
18	4.50	1.08	44.1	45.4	1940	117
19	4.75	1.16	46.6	54.1	2170	135
20	5.00	1.24	49.1	60.9	2410	254

Tablica 3. Druga serija mjerenja

Površinu i duljinu uzimamo iz prve serije mjerenja. Prvo, koristeći opću formulu

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

odredimo srednje vrijednosti podataka iz tablice:

$$\overline{\Delta l F} = 20 \cdot 10^{-3} Nm$$

$$\overline{F^2} = 860 N^2$$

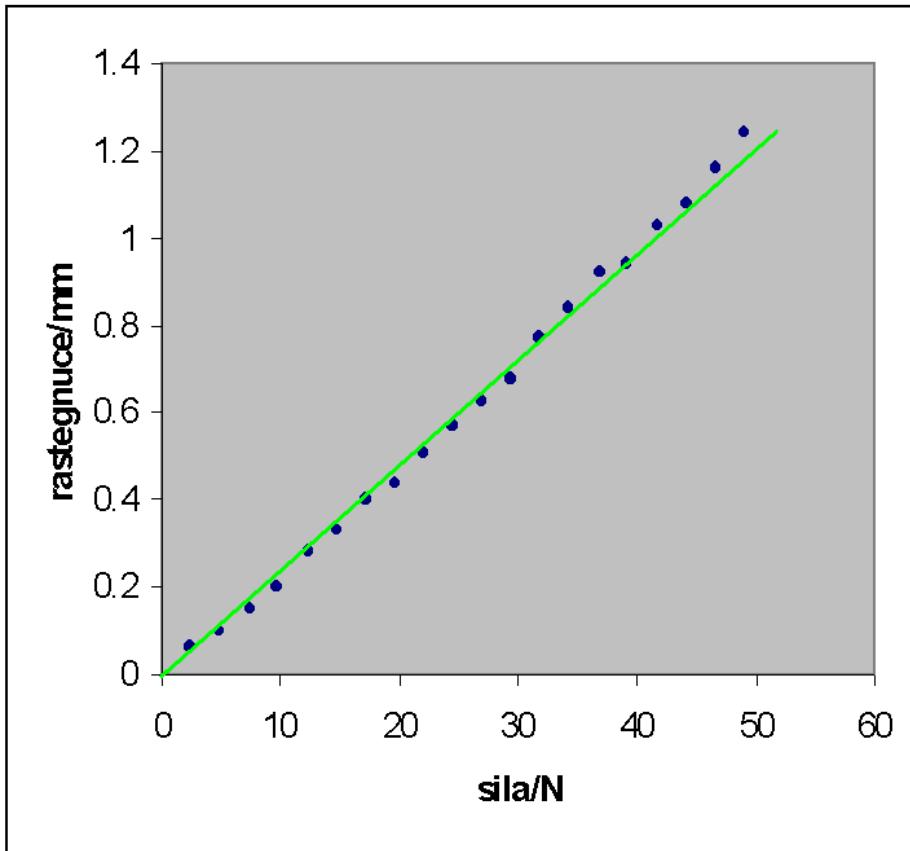
$$\overline{\Delta l^2} = 60 \cdot 10^{-8} m^2$$

Sada možemo izračunati

$$\bar{a} = \frac{\overline{\Delta l F}}{\overline{F^2}} = 2.3 \cdot 10^{-5} mN^{-1}$$

te pripadnu pogrešku

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{20} \left(\frac{\overline{\Delta l^2}}{\overline{F^2}} - \bar{a}^2 \right)} = 0.3 \cdot 10^{-5} mN^{-1}.$$



Graf 2. Iz grafa se vidi da je pomak proporcionalan sili, tj. što je sila veća to ja pomak (produljenje) veće.

Konačno srednji modul elastičnosti iznosi:

$$\bar{E} = \frac{\bar{l}}{\bar{a}\bar{S}} = 1.90 \cdot 10^{11} Nm^{-2},$$

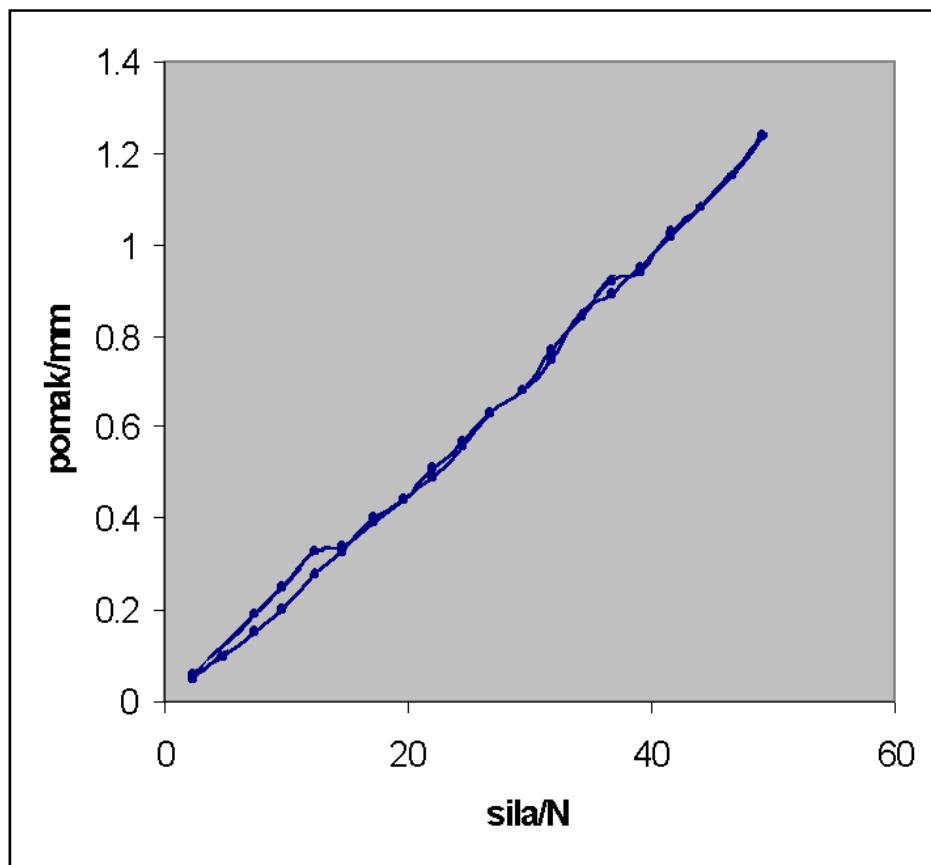
a pripadna pogreška:

$$\sigma_E = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial E}{\partial x_i} \Big|_{x_1=\bar{l}, x_2=\bar{a}, x_3=\bar{S}} \right)^2 \cdot \sigma_i^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{aS} \right)^2 \cdot \sigma_l^2 + \left(\frac{l}{a^2 S} \right)^2 \cdot \sigma_a^2 + \left(\frac{l}{aS^2} \right)^2 \cdot \sigma_S^2} = 0.20 \cdot 10^{11} Nm^{-2}.$$

što možemo zapisati u obliku

$$E = (1.9 \pm 0.2) \cdot 10^{11} Nm^{-2}$$



Graf 3.
Usporedba 1. i 2. grafa. Vidimo da su mjerena bila uspješna i pouzdana jer se grafovi rezultata mjerena skoro podudaraju.

KOMENTAR: Treba dobro podesiti mjerku, jer bi loše podešena mjerka mogla dati potpuno kriva mjerena. Teško je u stotinku milimetra procijeniti duljinu žice. Skala za očitavanje iznosa sile je dosta neprecizna zbog male podijeljenosti pa je teško točno u stotinku procijeniti silu. Trebalo bi koristiti osjetljiviji dinamometar i to baždaren u njutnjima zbog jednostavnijeg računanja. Mjerena dobivena pokusom su pouzdana o čemu svjedoči graf 3. na kojem su uspoređene dvije nezavisne serije mjerena.